INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BOTOȘANI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 februarie 2020

BAREM
Clasa a V-a

SUBIECTUL I (7p)

a) Verificați dacă $2020 = 44^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2$.

b) Să se arate că 2020^{2n+1} se poate scrie ca sumă de patru pătrate perfecte, oricare ar fi numărul natural *n*.

Soluție:

a) Verifică relația 3p

b) $2020^{2n+1} = 2020^{2n} \cdot 2020 = 2020^{2n} \cdot (44^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2) =$ 2p

$= 2020^{2n} \cdot 44^2 + 2020^{2n} \cdot 8^2 + 2020^{2n} \cdot 4^2 + 2020^{2n} \cdot 2^2 =$ 1p

$= (2020^n \cdot 44)^2 + (2020^n \cdot 8)^2 + (2020^n \cdot 4)^2 + (2020^n \cdot 2)^2$ 1p

SUBIECTUL II (7p)

a) Se consideră numerele $a = \underbrace{111...11}_{2020 cifre} + \underbrace{222...22}_{2020 cifre} + \underbrace{333...33}_{2020 cifre} .... \underbrace{999....99}_{2020 cifre}$ și

$b = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999...99}_{2019 cifre} + 2020$. Aflați câtul și restul împărțirii lui *a* la *b*.

b) Câte numere naturale de trei cifre, nu toate egale, care coincid cu răsturnatele lor, se pot forma folosind cifrele 1, 2, 3, 4, 5 ?

Soluție:

a) $a = \underbrace{111...11}_{2020\ cifre} \cdot (1+2+3+....+9) = \underbrace{111...11}_{2020\ cifre} \cdot 45$ 2p

$b = (1+9) + (1+99) + (1+999) + ... + (1 + \underbrace{999...99}_{2019\ cifre}) + 1 = \underbrace{111...11}_{2020\ cifre}$ 1p

Câtul este 45, restul este 0. .... 1p

b) Numerele sunt de forma $\overline{aba}$ 1p

a poate lua 5 valori, iar *b* poate lua 4 valori (sau invers) 1p

Sunt 20 de numere 1p

SUBIECTUL III (7p)

Să se determine cel mai mare număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ care împărțit la 16 dă restul 3, iar răsturnatul lui, $\overline{cba}$, dă restul 12 la împărțirea cu 15.

Soluție:

$\overline{abc} = 16 \cdot q + 3$ și $\overline{cba} = 15 \cdot k + 12$ 2p

Ultima cifră a numărului $15 \cdot k + 12$ este 2 sau 7. Cea mai mare valoare a lui *a* este 7 .... 2p

$16 \cdot q + 3 \le 799 \Rightarrow q \le 49$ 1p

$q = 49$ nu convine 1p

$q = 48$. Finalizare $\overline{abc} = 771$ 1p

SUBIECTUL IV (7p)

Ordonați crescător numerele: $a = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot .... \cdot 2^{2020}$, $b = 4^1 \cdot 4^3 \cdot 4^5 \cdot .... \cdot 4^{2021}$, $c = 8^1 \cdot 8^4 \cdot 8^7 \cdot .... \cdot 8^{2020}$ și $d = 16^1 \cdot 16^5 \cdot 16^9 \cdot .... \cdot 16^{2021}$.

Gazeta Matematică

Soluție:

$a = 2^{1010 \cdot 2021}$ 2p

$b = 4^{1011 \cdot 1011} = 2^{1011 \cdot 2022}$ 2p

$c = 8^{337 \cdot 2021} = 2^{1011 \cdot 2021}$ 1p

$d = 16^{1011 \cdot 506} = 2^{1011 \cdot 2024}$ 1p

Finalizare: *a*, *c*, *b*, *d* 1p