

X**Olimpiada Națională de Matematică**
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a X – a**SUBIECTE:**

1. Rezolvați ecuațiile:

a)
$$\frac{1}{a^x + b^{2x}} + \frac{1}{a^{2x} + b^x} + \frac{1}{(ab)^x + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^x} + \frac{1}{b^x} + \frac{1}{(ab)^x} \right). \quad (3 \text{ p})$$

(Generalizare G.M. Nr. 2/2014)

b)
$$\log_{2020}(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2) = \log_2 x. \quad (4 \text{ p})$$

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive sistemul:

$$2\log_2[x] + \{\log_2 y\} = 2\log_2[y] + \{\log_2 z\} = 2\log_2[z] + \{\log_2 x\} = 2. \quad (7 \text{ p})$$

3. Fie $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$ și $n \in \mathbb{N}$. Calculați

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1} + \left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}. \quad (7 \text{ p})$$

4. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $|z| = 1$, $z_1 = 1 + z + z^2 + \dots + z^{2020}$, $z_2 = z^{2020} - 1$.a) Arătați că modulul numărului complex $z_1 \in \mathbb{Q}$. (5 p)b) Arătați că modulul numărului complex $z_2 \in \mathbb{Q}$. (2 p)

(Prelucrare G.M.)

Învățând matematică, înveți să gândești. Nicio problemă nu are granițe. Orice răspuns, are multe.
(Grigore Moisil)

Notă:*Toate subiectele sunt obligatorii.**Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.**Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.**Timp de lucru: 3 ore.*