XII

# Olimpiada Naţională de Matematică
## Etapa locală, 1 februarie 2020
## Clasa a XII – a

**SUBIECTE:**

**1.** Se consideră grupul $(G,\cdot)$ cu elementul neutru $e$.

**a)** Fie $a,b \in G$ cu proprietatea că $(a\cdot b)^k = a^k \cdot b^k, \forall k \in \{3,4,5\}$ . Arătați că $a\cdot b = b\cdot a$. **(4p)**

**b)** Fie $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$. Arătați că $(H,\cdot)$ este subgrup al $(G,\cdot)$ dacă și numai dacă grupul $G$ este comutativ. **(3p)**

**2.** Pe $R$ definim legea de compoziție $x * y = \left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n$ , unde $n \in N, n \geq 3$ impar . Arătați că $(R,*)$ este grup abelian, iar grupurile $(R,+)$ și $(R,*)$ sunt izomorfe . **(7p)**

(ONM, 2014)

**3.** **a)** Determinați primitivele funcției $f:(0,\infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^{10}}$. **(3p)**

**b)** Fie $f: R \to R$ o funcţie cu proprietatea că $f\left(e^{-x}\right) \geq e^x, \forall x \in R$. Să se arate că funcţia $f$ nu admite primitive. **(4p)**

**4** Se consideră $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Calculați $\displaystyle\int \frac{1}{tg^4 x - tg^4 a} dx$ , pentru $x \in (0,a)$ . **(7p)**

*Învăţând matematică, înveţi să gândeşti. Nicio problemă nu are graniţe. Orice răspuns, are multe.*
*(Grigore Moisil)*

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*
*Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.*
*Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.*
*Timp de lucru: 3 ore*