



# VIII

## Olimpiada Națională de Matematică Etapa locală, 1 februarie 2020 Clasa a VIII – a

### SUBIECTE:

1. a) Arătați că  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , oricare ar fi numerele  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a, b > 0$ .

(2 p)

(\*\*\*)

b) Fie  $x, y, z > 0$  numere reale cu  $xyz = 6$ . Arătați că

$$\frac{2x}{(2x^2 + y^2)(x^2 + 2z^2)} + \frac{3y}{(3y^2 + z^2)(y^2 + 3x^2)} + \frac{5z}{(5z^2 + x^2)(z^2 + 5y^2)} \leq \frac{1}{8}.$$

(5 p)

(G.M. Nr.11/2017)

2. Fie numerele reale  $x, y, z$ , care satisfac relațiile:

$$(x - \sqrt{2020})(x + \sqrt{2020}) + \sqrt{2018} \cdot y \cdot (2x + \sqrt{2018} \cdot y) = 2019 \cdot z^2 \text{ și}$$

$$x + \sqrt{2018} \cdot y + \sqrt{2019} \cdot z = 1010.$$

Arătați că  $x + \sqrt{2018} \cdot y - \sqrt{2019} \cdot z$  este număr prim.

(7 p)

(Enunț prelucrat – ONM 2013)

3. O prismă dreaptă  $ABCA'B'C'$  are bazele triunghiuri echilaterale cu latura de lungime  $a$ . Știind că dreptele  $AB'$  și  $BC'$  sunt perpendiculare, să se afle:

a) lungimea muchiei laterale;

(4 p)

b) o funcție trigonometrică a unghiului format de planele  $(BMC')$  și  $(ABC)$ , unde  $M$  este mijlocul muchiei  $[AC]$ .

(3 p)

(\*\*\*)

4. Prin vârfurile  $A, B, C$  ale paralelogramului  $ABCD$  se consideră dreptele paralele  $a, b$  respectiv  $c$ . De aceeași parte a planului  $(ABC)$ , pe dreptele  $a, b, c$ , se iau punctele  $A', B', C'$ , astfel încât lungimile segmentelor  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$ , exprimate în unități de lungime, să fie egale cu:

$$AA' = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1 \cdot 2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2 \cdot 3}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad BB' = \sqrt{2021} \text{ și } CC' = 1.$$

Determinați  $n$  astfel încât  $D \in (A'B'C')$ .

(7 p)

*Învățând matematică, înveți să gândești. Nicio problemă nu are granițe. Orice răspuns, are multe.*  
(Grigore Moisil)

### Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.