IX

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a IX – a

SUBIECTE:

1. Fie $x,y,z \in (0,\infty)$, astfel încât $x.y.z = 27$

a) Arătați că $\sqrt{x} + \sqrt{3y} + \sqrt{5z} \leq x + y + z$; **(3p)**

b) Precizați dacă există numere reale pozitive x,y,z care verifică egalitatea:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}+2y+5z} + \frac{y^2}{\sqrt{3y}+3z+7x} + \frac{z^2}{\sqrt{5z}+x+6y} = 1$$ **(4p)**

2. Fie șirul crescător $x_n \in [0,\infty)$,cu $x_0 = 0$ și $x_1 = a$, care verifică relația:

$x_{n+1} = a - x_n + 2\sqrt{x_n x_{n+1}}$, $\forall$ n $\in$ N

Arătați că $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a^2 + 4a\sqrt{x_k\, x_{k-1}}}$ **(7p)**

***

3. Fie $A' \in (BC)$,$B' \in (AC)$,$C' \in (AB)$ punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile ΔABC.

a) Calculați, în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$, vectorul

$\vec{v} = a^2\overrightarrow{AA'} + b^2\overrightarrow{BB'} + c^2\overrightarrow{CC'}$, cu notațiile obișnuite în ΔABC. **(5p)**

b) Dacă a,b,c sunt numere pozitive în progresie aritmetică, atunci $\vec{v}$ coliniar cu $\overrightarrow{AC}$ **(2p)**

***

4. Să se rezolve în **R** ecuația : $\sqrt{x^2 + 31x} + \sqrt{x+31} = x + \sqrt{x} + 8$ **(7p)**

(G.M. Nr 11 / 2019)

Învăţând matematică, înveţi să gândeşti. Nicio problemă nu are graniţe. Orice răspuns, are multe.
(Grigore Moisil)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.