Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4-9+12i=-5+12i=$	**3p**
	$=5i^2+12i=i(5i+12)$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=x+a+a=x+2a$, $f(x+1)=x+1+a$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x+2a=x+1+a\Rightarrow a=1$	**2p**
3.	$5\cdot 2\cdot 2^x\cdot 3^x=12\cdot 5^x\Leftrightarrow 10\cdot 6^x=12\cdot 5^x$	**3p**
	$\left(\frac{6}{5}\right)^x=\frac{6}{5}$, deci $x=1$	**2p**
4.	$f(1)$ poate fi aleasă în două moduri, iar $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în câte patru moduri	**3p**
	Există $4^2\cdot 2=32$ de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ astfel încât $f(1)\geq 3$	**2p**
5.	$m_{AC}=-1$	**2p**
	Cum $BD\perp AC$, obținem $m_{BD}=1$	**3p**
6.	$\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, deci $x=\frac{\pi}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{vmatrix}=2^x\cdot 3^x-0\cdot 0=$	**3p**
	$=(2\cdot 3)^x=6^x$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 2^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 3^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2^x & 2^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 3^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2^x=3^x$, de unde obținem $x=0$	**2p**
c)	$X\cdot X\cdot X=A(1)\cdot X$ și $X\cdot X\cdot X=X\cdot A(1)\Rightarrow A(1)\cdot X=X\cdot A(1)$, deci, pentru $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, unde a, b, c și d sunt numere reale, obținem $\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 3c & 3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 3b\\ 2c & 3d\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=0$ și $c=0$	**3p**
	$\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow a\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$ și $d\in\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$, deci orice matrice X, pentru care $X\cdot X=A(1)$, are două elemente numere iraționale	**2p**

2.a)	$x \circ x = x^2 + x \cdot x + x^2 =$	**3p**
	$= 3x^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$x^2 + xa + a^2 = x^2 + xb + b^2 \Leftrightarrow x(a-b) + \left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x+a+b) = 0$	**3p**
	Cum $a \neq b$, obținem $x = -a-b$	**2p**
c)	$x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$	**3p**
	$(x+1)^3 = 0$, de unde obținem $x = -1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} =$	**3p**
	$= 2 - \ln(x+1) - 1 = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e-1$	**2p**
	Pentru orice $x \in (-1, e-1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1, e-1]$ și pentru orice $x \in [e-1,+\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e-1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x \in (-1,+\infty)$	**2p**
	Cum, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1} < 0$, obținem $f''(x) < 0$, deci f este concavă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - e^x\right)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - e^x\right)\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{3}{2} - e$	**2p**
b)	$\int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x\left(x - e^x\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 - xe^x\right)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1 - \left.(x-1)e^x\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	**2p**
c)	$I_n = \int_0^1 x^n \left(x - f(x)\right)dx = \int_0^1 x^n e^x\, dx = \left.x^n e^x\right\|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x\, dx =$	**3p**
	$= e - nI_{n-1}$, de unde obținem $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**