FIȘĂ DE LUCRU
Primitive BAC

1. Se consideră funcţia f: $(0,\infty)\to R$, f(x)=$1-\frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcţia F: $(0,\infty)\to R$, F(x)=$x+\frac{1}{x}$ este o primitivă a funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f: $R\to R$, f(x)= $\begin{cases} x^2-3x+2, x\le 1 \\ \ln x, \quad x>1 \end{cases}$
   a) Să se arate că funcţia f admite primitive.
   b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(1,\infty)$.
3. Se consideră funcţia f: $[0,1]\to R$, f(x)=1-$\sqrt{x}$. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f.
4. Se consideră funcţia f: $[0,1]\to R$, f(x)=$\sqrt{x+2}$. Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.
5. Se consideră funcţia f: $R\to R$, f(x)= $\begin{cases} x^2+x-2, x<1 \\ (x+1)\ln x, x\ge 1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.
6. Se consideră funcţia f: $R\to R$, f(x)=$x^{2009}+x+1$. Să se determine primitiva F a funcţiei f care are proprietatea F(0)=1.
7. Se consideră funcţia f: $[0,\infty)\to R$, f(x)=$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$. Să se arate că $\int (x+1)(x+2)f(x)dx = x^2+3x+C, x\ge 0$.
8. Se consideră funcţiile f,g: $[0,\infty)\to R$, f(x)=$\frac{x^3}{(x+1)}$ şi g=f''(x). Să se determine primitiva funcţiei g a cărei asimptotă spre ∞ este dreapta de ecuaţie y=2x.
9. Se consideră funcţia f: $R\to R$, f(x)=e^{x^2}. Să se determine $\int f(\sqrt{x})dx, x\in[0,\infty)$.
10. Se consideră funcţia f: $[0,1]\to R$, f(x)=1-x. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f.
11. Se consideră funcţia f: $R\to R$, f(x)=$\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$. Să se determine $\int (x^2+1)f(x)dx$.
12. Se consideră funcţia f: $R\to R$, f(x)=$x^{1004}+2009^x$.
    a) Să se determine $\int f(x)dx$.
    b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe R.
13. Se consideră funcţia f: $[1,\infty)\to R$, f(x)=$\ln x+\frac{1}{x}$. Să se arate că funcţia F: $[1,\infty)\to R$ F(x)=(x+1)lnx-x+1 este o primitivă a funcţiei f.
14. Se consideră funcţia f: $[2,\infty)\to R$, f(x)= $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $[2,\infty)$.
15. Se consideră funcţia f: $(0,\infty)\to R$, f(x)=$e^x+\ln x$. Ştiind că g: $(0,\infty)\to R$, g(x)=f(x)-lnx, să se arate că $\int g(x)dx = g(x)+C, x>0$.

16. Se consideră funcţiile f,g: $R \to R$, f(x)= $\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ şi g(x)= $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$. Să se arate că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

17. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $x^2 + e^x + 1$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe R.

18. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\begin{cases} e \cdot e^x, x \le -1 \\ 2 + x, x > -1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

19. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\begin{cases} x_2 + e^x, x \le 0 \\ \sqrt{x} + 1, x > 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

20. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$(x-1)^{2007}$. Să se calculeze $\int f(x)dx$.

21. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= xe^x. Să se arate că funcţia F: $R \to R$, F(x)= $(x-1)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.

22. Se consideră funcţia f: $[1,\infty) \to R$, f(x)= $\frac{1}{x(1+\ln x)}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

23. Se consideră funcţiile f,g: $(0,\infty) \to R$, f(x)= e^x şi g= $\frac{1}{x}$. Să se calculeze primitivele funcţiei f+g.

24. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to R$ definite prin $f_m(x) = m^2x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$, unde $m \in R$. Să se calculeze $\int f_1(x)dx$.

25. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=lnx-x. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(0,\infty)$.

26. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)= $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $(0,\infty)$.

27. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $3^x + 3^{-x}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(-\infty,0]$ şi convexă pe $[0,\infty)$.

28. Se consideră funcţia f: $[1,\infty) \to R$, f(x)=lnx+$\frac{1}{x}$. Să se arate că funcţia F: $[1,\infty) \to R$, F(x)=(x+1)lnx-x+1, este o primitivă a funcţiei f care se anulează în x=1.

29. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=1+lnx. Să se arate că funcţia g: $(0,\infty) \to R$, g(x)=xlnx este o primitivă a funcţiei f.

30. Se consideră funcţiile f,g: $(0,\infty) \to R$, date prin f(x)= $x^2 + x\ln x$ şi g(x)=2x+lnx+1. Să se arate că f este o primitivă a funcţiei g.

31. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $e^x + 3x^2 + 2$. Să se arate că funcţia F: $R \to R$, F(x)= $e^x + x^3 + 2x - 1$ este o primitivă a funcţiei f.

32. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\begin{cases} x+2, x<0 \\ e^x + 1, x \ge 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive.

33. Se consideră funcţiile f,g: $R \to R$ definite prin f(x)=$\ln(x^2+1)$ şi g(x)=$\frac{2x}{x^2+1}$. Să se arate că $\int g(x)dx = f(x) + C$.

34. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=$1-\frac{1}{x}$. Să se arate că funcţia F: $(0,\infty) \to R$, F(x)=x-lnx este o primitivă a funcţiei f.

35. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=$x-\frac{1}{x}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este covexă pe intervalul $(0,\infty)$.

36. Se consideră funcţia f: $[1,\infty) \to R$, f(x)=$\frac{\ln x}{x}$. Să se arate că funcţia g: $[1,\infty) \to R$, g(x)=$\frac{1-\ln x}{x^2}$ este o primitivă a funcţiei f.

37. Se consideră funcţia f: $\left(\frac{1}{2},\infty\right) \to R$, f(x)=$\sqrt{2x-1}$. Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

38. Se consideră funcţiile f,g: $(0,\infty) \to R$, date prin f(x)=$\sqrt{x}+\ln x$ şi g(x)=$\frac{\sqrt{x}+2}{2x}$. Să se arate că f este o primitivă a funcţiei g.

39. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $e^x + x^2 + 2x$. Să se arate că funcţia F: $R \to R$, F(x)=$e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$ este o primitivă a funcţiei f.

40. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\begin{cases} x+1 & ,x<0 \\ \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

41. Se consideră funcţiile $f_m : R \to R$ definite prin $f_m(x) = m^2x^2 + mx + 1$, unde $m \in R^*$. Să se demonstreze că funcţiile $f_m : R \to R$ sunt crescătoare pentru orice $m \in R^*$.

42. Se consideră funcţia F: $[0,\infty) \to R$, $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$. Să se determine funcţia f: $[0,\infty) \to R$, astfel încât F să fie o primitivă a funcţiei f .

43. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\begin{cases} x^3 & ,x \leq 0 \\ x+\sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

44. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=$\frac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva F: $(0,\infty) \to R$ a funcţiei f , care verifică relaţia F(1)=0.

45. Se consideră funcţiile $f_m : [1,2] \to R$ definite prin $f_m(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + ... + \frac{1}{x+m}$ unde $m \in R$. Ştiind că F este o primitivă a funcţiei f_1 ,să se arate că funcţia $G : [1,2] \to R$, definită prin $G(x) = F(x) - \frac{5}{6}x$ este crescătoare.

46. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\begin{cases} x+5, & x<-1 \\ 3x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

47. Se consideră funcţiile $f, F : (0,\infty) \to R$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ şi $F(x) = e^x + x - \ln x$. Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

48. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \le 1 \\ \ln x - 2, & x > 1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

49. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Să se arate că orice primitivă a funcţiei f, este crescătoare pe $(0,\infty)$.

50. Se consideră funcţiile $f_m : R \to R$ definite prin $f_m(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$. Să se determine primitive G a funcţiei $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$, care verifică relaţia $G(1) = \frac{13}{15}$.

51. Se consideră funcţia $f: (0,\infty) \to R$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Să se determine $\int f(x)dx$.

52. Se consideră funcţia $f: (0,1) \to R$, $f(x) = \sqrt{x+2}$. Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

53. Se consideră funcţiile $f_m : R \to R$ definite prin $f_m = x^m + 1$. Să se determine $\int f_1(x)dx$.

54. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to R$ definite prin $f_m = x^m + (1-x)^m$. Să se determine $\int f_2(x)dx$.

55. Se consideră funcţiile $f_m : [0,2] \to R$ definite prin $f_m = (2-x)^n$. Să se determine $\int f_1(x)dx$.

56. Se consideră funcţia $f: [1,2] \to R$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$. Să se determine $\int f(x)dx$.

57. Să se determine $\int (x + \sqrt{x})dx$.

58. Să se determine $\int \left(\frac{1}{x} - 3\sqrt{x}\right)dx$.

59. Se consideră funcţia $f: [0,1] \to R$, $f(x) = 1 - x$. Să se determine $\int f(x)dx$.

60. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to R$ definite prin $f_m = (x^{m+1} + 1) \cdot e^x$. Să se determine $\int f_0(x) \cdot e^{-x}dx$.

61. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to R$ definite prin $f_n(x) = e^{x^n}, n \in N^*$. Să se determine $\int f_1(x)dx$.