Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $A=z(2+3i)+\overline{z}(2-3i)$ este real, pentru orice număr complex z, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+7$. Arătați că $f(\sqrt{2})\cdot f(1+\sqrt{2})\cdot f(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot f(10+\sqrt{2})=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2+x-2)=1+\lg\frac{x-1}{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie mai mare decât 51.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$, $B(-3.-1)$ și $C(-2,-2)$. Arătați că punctul $M(1,2)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră R, raza cercului circumscris triunghiului ABC și r, raza cercului înscris în triunghiul ABC. Știind că $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{rR}$, arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ 4 & 1 & m\\ 1 & -m & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+mz=4\\ 4x+y+mz=6\\ x-my-z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $2*(-2)=0$.

5p **b)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$. Arătați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x^2-x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$.
5p	**c)** Determinați imaginea funcției f.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.
5p	**a)** Arătați că $\int\limits_0^2 f(x)dx=\dfrac{\pi}{8}$.
5p	**b)** Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul $I_n=\int\limits_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\int\limits_0^a x f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.