Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 2$ și rația $r = 3$. Calculați a_3.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2) = 9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+2} - 3^{2x} = 8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al lui 100.

5p **5.** Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 12+a & a \\ 1+a & 3+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 36$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a) - (12+a)I_2) = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X \cdot X = A(0)$. Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + \sqrt[3]{y} - 2$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 1 = 0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x \circ a = x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x^6 = 4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x \in (1,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+2x+2) f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln 5$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right)\ln x\,dx = \frac{e^2+5}{4}$.