

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$\left(0,25 \cdot 10 - \frac{1}{2}\right)\left(0,25 \cdot 10 + \frac{1}{2}\right) = (2,5 - 0,5)(2,5 + 0,5) =$ $= 2 \cdot 3 = 6$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.</b>	$f(2) = 1 \Rightarrow 4 - 2a + 1 = 1$ $a = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$3^x(3^2 + 1) = 30 \Leftrightarrow 3^x = 3$ $x = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	$\frac{20}{100} \cdot 500 = 100$ de lei Prețul după scumpire este $500 + 100 = 600$ de lei	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5.</b>	Mijlocul segmentului $AB$ este punctul $M(4,3)$ $OM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} =$ $= \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 =$ $= 2 - 3 = -1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $A \cdot A - 3A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1+3y & x+3 \\ 1+2y & x+2 \end{pmatrix}, X \cdot A = \begin{pmatrix} 1+x & 3+2x \\ y+1 & 3y+2 \end{pmatrix}$ , unde $x$ și $y$ sunt numere reale $\begin{pmatrix} 1+3y & x+3 \\ 1+2y & x+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+x & 3+2x \\ y+1 & 3y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3y-x & -x \\ y & x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = -1$ și $y = -1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$3 \circ 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 + 2 =$ $= 24 + 5 = 29$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x \circ y = \frac{16xy + 4x + 4y}{4} = \frac{16xy + 4x + 4y + 1 - 1}{4} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{4x(4y+1) + (4y+1) - 1}{4} = \frac{(4x+1)(4y+1) - 1}{4}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$x \circ x = \frac{(4x+1)^2 - 1}{4}$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$\frac{(4x+1)^2 - 1}{4} \leq 2 \Leftrightarrow (4x+1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq 4x+1 \leq 3$ , de unde obținem $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = e^x + \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$	<b>3p</b>
	$= e^x + \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = e^x + \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \right) = 0$	<b>3p</b>
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției $f$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$x \in [-1, 1] \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1] \Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$	<b>3p</b>
	Cum $f(-1) = \frac{2-e}{2e}$ și $f(1) = \frac{2e+1}{2}$ , obținem $\frac{2-e}{2e} \leq f(x) \leq \frac{2e+1}{2}$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 (x+1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^2 =$	<b>3p</b>
	$= (2+2) - \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{2}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 x(x+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x) dx = \pi \left( \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= \pi \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{17\pi}{12}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x} \ln x}{x+1} dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx =$	<b>3p</b>
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big _1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$ , deci $a = 1$	<b>2p</b>