

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\sqrt{10} - \sqrt{6}$, 2 și $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^{2021}}{x^2 + 1}$. Arătați că funcția f este impară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} = 16$.
- 5p** 4. Determinați numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -2)$, $B(0, 3)$ și $C(-2, 2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Triunghiul ABC are măsura unghiului A de 30° și măsura unghiului B de 45° . Arătați că $AC = BC\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 4x + y + mz = 9 \\ x + 2y - z = 4 \\ -2x - 3y = -7 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(m)) = m - 10$, pentru orice număr real m .
- 5p** b) Determinați inversa matricei $A(9)$.
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real m , $m \neq 10$, dacă (a, b, c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a = b + c$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 7(x - 3)(y - 3) + 3$.
- 5p** a) Arătați că $x * 3 = 3$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Determinați numărul real x , astfel încât $x * x * x = -46$.
- 5p** c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5^x}{7} + 3$. Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x + 2}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3 - x - 2}{x^2(x + 2)}$.
- 5p** a) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2x + \frac{1}{x} - 4 \ln(x + 2)$ este o primitivă a funcției f .

5p b) Calculați $\int_1^2 (x+2)f(x) dx$.

5p c) Determinați numărul real m , $m > 2$, astfel încât $\int_2^m f(x) dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$.