

Examenul de bacalaureat național 2023

Proba E. c)

Matematică M mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE Simulare Ianuarie

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I (30 puncte)

1	$\begin{cases} a_2 + a_3 = 8 \\ a_2 + a_5 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = 8 \\ 2a_1 + 5r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow r = 2, a_1 = 1$ $a_{10} = a_1 + 9r \Leftrightarrow a_{10} = 19$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(1 + 19) \cdot 10}{2} = 100$	3p  2p
2	$G_f \cap G_g : f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$ <p>Pt. <math>x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(2, 3)</math>, iar pt <math>x = 3 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow B(3, 7)</math></p> $\Rightarrow G_f \cap G_g = \{A(2, 3); B(3, 7)\}$	3p  2p
3	$CE : \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 6x - 12 > 0 \end{cases}$ , ecuația este echivalentă cu $x^2 - 4 = 6x - 12 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$ <p><math>x_1 = 2</math>, care nu verifică CE, <math>x_2 = 4</math>, care verifică CE, deci soluția ecuației este <math>x = 4</math></p>	2p  3p
4	$\begin{cases} n : 5 \\ n \in M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5k, k \in N^* \\ 1 \leq 5k \leq 2023 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{1, 2, \dots, 404\}$ , deci sunt 404 numere din $M$ divizibile cu 5. <p>Dintre acestea, 202 numere sunt pare, deci divizibile cu 10 <math>\Rightarrow</math> sunt 202 numere din <math>M</math> divizibile cu 5 și nu cu 10. Deci sunt 202 cazuri favorabile.</p> $ M  = 2023$ , deci sunt 2023 cazuri posibile $\Rightarrow P = \frac{\text{numar cazuri favorabile}}{\text{numar cazuri posibile}} = \frac{202}{2023}$	3p  2p
5	$\overline{CM} = 2\overline{BM} \Leftrightarrow \overline{CM} + \overline{MB} = \overline{MB} + \overline{BM} + \overline{BM} \Leftrightarrow \overline{CB} = \overline{BM}$ deci $B$ este mijlocul segmentului $[CM]$ $\Rightarrow \overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{AC}) \Leftrightarrow 2\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AM} = 2\overline{AB} - \overline{AC}$	3p  2p
6	$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\Leftrightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ ; ridicăm la pătrat și obținem $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$ $\sin 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$	2p  3p

**Subiectul al II-lea**

**(30 puncte)**

<b>1a</b>	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $= 6 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>1b</b>	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 3x & 0 \\ 0 & 5x+1 & 0 \\ 0 & 2x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3y & 0 \\ 0 & 5y+1 & 0 \\ 0 & 2y & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 3x+3y+15xy & 0 \\ 0 & 5x+5y+25xy+1 & 0 \\ 0 & 2x+2y+10xy & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 3(x+y+5xy) & 0 \\ 0 & 5(x+y+5xy)+1 & 0 \\ 0 & 2(x+y+5xy) & 1 \end{pmatrix} = A(x+y+5xy).$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>1c</b>	$A(x) \cdot A^{-1}(x) = I_3 \text{ și } A^{-1}(x) = A(x) \Rightarrow A(x) \cdot A(x) = I_3 \Rightarrow$ $A(2x+5x^2) = A(0) \Rightarrow 2x+5x^2 = 0$ $x_1 = 0 \text{ și } x_2 = -\frac{2}{5}$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>2a</b>	$x \circ y = 5xy - 15x - 15y + 45 + 3$ $= 5x(y-3) - 15(y-3) + 3 = 5(x-3)(y-3) + 3 \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y.$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2b</b>	$x \circ \frac{16}{5} = 5(x-3) \left( \frac{16}{5} - 3 \right) + 3 = 5(x-3) \frac{1}{5} + 3 = x - 3 + 3 = x, x \in \mathbb{R}$ $\frac{16}{5} \circ x = 5 \left( \frac{16}{5} - 3 \right) (x-3) + 3 = 5 \cdot \frac{1}{5} (x-3) + 3 = x - 3 + 3 = x, x \in \mathbb{R},$ <p>deci <math>e = \frac{16}{5}</math> este elementul neutru al legii de compoziție "o".</p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2c</b>	$x \circ x = 5(x-3)(x-3) + 3 = 5(x-3)^2 + 3 \Rightarrow x \circ x \circ x = 25(x-3)^3 + 3$ $25(x-3)^3 = x - 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ sau } x = \frac{14}{5} \text{ sau } x = \frac{16}{5}$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>

Subiectul al III-lea

(30 puncte)

<p><b>1a</b></p>	$f'(x) = \left(1 - \frac{2e^x}{x+e^x}\right)' = 1' - \left(\frac{2e^x}{x+e^x}\right)' = 0 - \frac{(2e^x)'(x+e^x) - 2e^x(x+e^x)'}{(x+e^x)^2}$ $= -\frac{(2e^x)(x+e^x) - 2e^x(1+e^x)}{(x+e^x)^2} = -\frac{2e^x(x-1)}{(x+e^x)^2} = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$	<p>2p</p> <p>3p</p>												
<p><b>1b</b></p>	<p><math>\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Rightarrow y = a</math> este ecuația A.O.</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{2e^x}{x+e^x} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{x+e^x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{x+e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{1+e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2$ <p><math>y = -1</math> A.O.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>												
<p><b>1c</b></p>	<p>Determinarea eventualelor puncte de extrem local <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1</math></p> <p>Calculul <math>f(0) = -1</math> și Calculul <math>f(1) = \frac{1-e}{1+e}</math></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 15%;"><math>x</math></td> <td style="width: 30%;">0</td> <td style="width: 30%;">1</td> <td style="width: 25%;">∞</td> </tr> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td>+++</td> <td>0</td> <td>---</td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>-1 (min)</td> <td><math>\frac{1-e}{1+e}</math> (max)</td> <td>-1 (min)</td> </tr> </table> <p><math>\Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}, (\forall) x \geq 0</math></p>	$x$	0	1	∞	$f'(x)$	+++	0	---	$f(x)$	-1 (min)	$\frac{1-e}{1+e}$ (max)	-1 (min)	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
$x$	0	1	∞											
$f'(x)$	+++	0	---											
$f(x)$	-1 (min)	$\frac{1-e}{1+e}$ (max)	-1 (min)											
<p><b>2a</b></p>	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ $= x \Big _0^1 - \ln(x+1) \Big _0^1 = 1 - \ln 2$	<p>3p</p> <p>2p</p>												
<p><b>2b</b></p>	$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{x+1} dx$ $\int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{x+1} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{n+1}$	<p>2p</p> <p>3p</p>												
<p><b>2c</b></p>	<p><math>\frac{x^{2022}}{2} \leq \frac{x^{2022}}{x+1} \leq x^{2022}</math>, pentru orice <math>x \in [0, 1]</math></p> <p>Integrăm <math>\int_0^1 \frac{x^{2022}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2022}}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^{2022} dx</math> Obținem <math>\frac{x^{2023}}{2 \cdot 2023} \Big _0^1 \leq I_{2022} \leq \frac{x^{2023}}{2023} \Big _0^1</math></p> <p>Înmulțim cu 2023 și reiese inegalitatea.</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>												