



Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = a + bi, \bar{z} = a - bi, a, b \in \mathbb{R}. z + 2\bar{z} = 3 + i \Leftrightarrow 3a - bi = 3 + i$ $a = 1, b = -1 \Rightarrow z = 1 - i$ $\left  \frac{z + 2i}{z} \right  = \left  \frac{1 + i}{1 - i} \right  = \frac{ 1 + i }{ 1 - i } = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$	2p 2p 1p
2.	Cum $a = 1 > 0$ , se impune condiția $\Delta \leq 0$ $\Delta = (m + 1)^2 - 36 \leq 0 \Rightarrow  m + 1  \leq 6$ $m \in [-7, 5]$	2p 2p 1p
3.	Se impun condiții de existență și compatibilitate $x + 1 \geq 0$ și $5 - x \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 5]$ Se obține $x + 1 = (5 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$ $x_1 = 3 \in [-1, 5]$ și $x_2 = 8 \notin [-1, 5]$ $x = 3$ care convine	2p 2p 1p
4.	$\overline{abcd}, a \in \{2, 4, 6\} \Rightarrow a$ ia 3 valori; $b \in \{0, 2, 4, 6\}, b \neq a \Rightarrow b$ ia 3 valori; $c \in \{0, 2, 4, 6\}, c \neq a, c \neq b \Rightarrow c$ ia 2 valori; $d \in \{0, 2, 4, 6\}, d \neq a, d \neq b, d \neq c \Rightarrow d$ ia o valoare; Sunt $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ numere	2p 2p 1p
5.	Fie $BB' \perp AC, B' \in AC \Rightarrow m_{BB'} \cdot m_{AC} = -1; m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1}{5}$ $m_{BB'} = -5$ ; înălțimea $BB'$ are ecuația $(BB'): y - y_B = m_{BB'}(x - x_B)$ $(BB'): 5x + y - 8 = 0$	2p 2p 1p
6.	Folosind imparitatea funcției sinus, se obține: $\sin(x - 60^\circ) = -\sin(60^\circ - x)$ $E(x) = \cos(x + 30^\circ) \cdot \cos(60^\circ - x) - \sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(60^\circ - x)$ Folosind formula $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b)$ se obține $E(x) = \cos(x + 30^\circ + 60^\circ - x) = \cos 90^\circ$ $E(x) = 0$	2p 2p 1p



SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><b>1.a)</b></p>	$A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -4$ $\det(A(-1)) + \det(A(1)) = 4 - 4 = 0$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
<p><b>b)</b></p>	$(A(a))^2 = \begin{pmatrix} 3a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & 3a^2 & -a^2 \\ -a^2 & -a^2 & 3a^2 \end{pmatrix}$ $(A(a))^2 - A(a) - 2I_3 = O_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a^2 - a - 2 & -a^2 + a & -a^2 + a \\ -a^2 + a & 3a^2 - a - 2 & -a^2 + a \\ -a^2 + a & -a^2 + a & 3a^2 - a - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{cases} 3a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \left\{ -\frac{2}{3}, 1 \right\} \\ -a^2 + a = 0 \Rightarrow a \in \{0, 1\} \end{cases} \Rightarrow$ $a = 1$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
<p><b>c)</b></p>	$A(-1) + xI_3 = \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{pmatrix}$ $\det(A(-1) + xI_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \stackrel{c_1+c_2+c_3}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x+1 & x-1 & 1 \\ x+1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0$ $x \in \{-1, 2\}$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
<p><b>2.a)</b></p>	$x * y = 2xy - 6x - 6y + 18 + 3 =$ $= 2x(y - 3) - 6(y - 3) + 3$ $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
<p><b>b)</b></p>	<p>Se arată că <math>x * 3 = 3 * x = 3, \forall x \in \mathbb{R}</math></p> <p>Folosind proprietatea de asociativitate a legii de compoziție „*”, se obține</p> $N = (\sqrt[3]{-2023} * \sqrt[3]{-2022} * \dots * \sqrt[3]{26}) * 3 * (\sqrt[3]{28} * \sqrt[3]{29} * \dots * \sqrt[3]{2022} * \sqrt[3]{2023}) = a * 3 * b = (a * 3) * b =$ $= 3 * b = 3 \in \mathbb{N}$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
<p><b>c)</b></p>	$f(xy) = \frac{1}{2}xy + 3; f(x) * f(y) = \left(\frac{1}{2}x + 3\right) * \left(\frac{1}{2}y + 3\right) = 2\left(\frac{1}{2}x + 3 - 3\right)\left(\frac{1}{2}y + 3 - 3\right) + 3 = \frac{1}{2}xy + 3$	<p>2p</p>



<p><math>f(xy) = f(x) * f(y), \forall x, y \in (0, +\infty)</math>, prin urmare <math>f</math> este morfism</p> <p><math>f(x) = \frac{1}{2}x + 3</math> este funcție de gradul I, strict crescătoare pe <math>(0, +\infty)</math>, prin urmare <math>f</math> este injectivă</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty</math>, <math>f</math> continuă, <math>f</math> strict crescătoare pe <math>(0, +\infty) \Rightarrow \text{Im } f = (3, +\infty) = G</math>, prin urmare <math>f</math> este surjectivă</p> <p><math>f</math> este morfism și <math>f</math> este bijectivă, prin urmare <math>f</math> este izomorfism de grupuri de la <math>((0, +\infty), \cdot)</math> la <math>(G, *)</math></p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
--	---------------------

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<p><b>1.a)</b> <math>f</math> este derivabilă pe <math>\mathbb{R}</math> (operații cu funcții derivabile pe <math>\mathbb{R}</math>)</p> $f'(x) = \frac{(x-1)' \sqrt{x^2+x+1} - (x-1) (\sqrt{x^2+x+1})'}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - (x-1) \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} =$ $= \frac{2(x^2+x+1) - (x-1)(2x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2x^2+2x+2-2x^2-x+2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ $f'(x) = \frac{3(x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
<p><b>b)</b></p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{ x  \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -1$ <p>Dreapta de ecuație <math>y = -1</math> este asimptotă orizontală spre <math>-\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p><b>c)</b> <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1</math></p> <p><math>f'(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f</math> este descrescătoare pe <math>(-\infty, -1]</math> și</p> <p><math>f'(x) \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in [-1, +\infty) \Rightarrow f</math> este crescătoare pe <math>[-1, +\infty)</math></p> <p><math>x = -1</math> punct de minim al funcției <math>\Rightarrow f(x) \geq f(-1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}</math></p> $f(x) \geq -2 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} \geq -2 \Rightarrow x-1 \geq -2\sqrt{x^2+x+1} \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} \geq \frac{1-x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ $f(x^2) \geq -2 \Rightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \geq -2 \Rightarrow x^2-1 \geq -2\sqrt{x^4+x^2+1} \Rightarrow \sqrt{x^4+x^2+1} \geq \frac{1-x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ <p>Finalizare <math>\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^4+x^2+1} \geq \frac{2-x-x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p>



2.a)	$\int_0^1 (f(x) + \ln(1+x)) dx = \int_0^1 \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} \right) \Big _0^1$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} =$ $= \frac{5}{12}$	2p  2p  1p
b)	<p><math>f</math> este derivabilă pe <math>(-1, +\infty)</math> (operații cu funcții derivabile pe <math>(-1, +\infty)</math>)</p> $f'(x) = \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \right)' = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{1-x+x^2+x-x^2+x^3-1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x}, \forall x \in (-1, +\infty).$ <p><math>f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f</math> crescătoare pe <math>[0, 1] \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]</math></p> <p><math>f</math> continuă, integrabilă pe <math>[0, 1], f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq 0</math></p>	2p  2p  1p
c)	<p>Conform punctului precedent, <math>f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \geq 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow</math></p> <p><math>\ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \forall x \in [0, 1]</math>; cele două funcții fiind continue și integrabile pe <math>[0, 1]</math> și aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite, rezultă că</p> $\int_0^1 (\ln(1+x) - x) dx \leq \int_0^1 \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) dx \Rightarrow \int_0^1 (\ln(1+x) - x) dx \leq \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} \right) \Big _0^1$ $\int_0^1 (\ln(1+x) - x) dx \leq -\frac{1}{12}$	2p  2p  1p