

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $2(1+i) - i(2-i) = 1$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 10$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(2a, a)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 2} = 2x$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu măsura unghiului B egală cu $\frac{\pi}{6}$ și $BC = 24$. Bisectoarea unghiului C al triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D . Determinați lungimea segmentului CD .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 3$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $A(0) \cdot A(x) = A(0)$.
- 5p c) Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y - 1 + 2^{xy}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 2 = 8$.
- 5p b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați numărul natural nenul n pentru care $n * \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$ cu $x < y$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
- 5p a) Arătați că $\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = 8$.

5p b) Arătați că $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \frac{\ln 5}{3}$.

5p c) Se consideră funcția $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției g este concavă.