

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + i$. Arătați că $z(z - 2i) = 10$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Arătați că $f(2x) - 2f(x) = -1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A , numărul $n + 5$ să fie multiplu de 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$ și $B(5, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 4. Arătați că $BC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Pentru $a = -2$, arătați că $x_0 z_0 + y_0 = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 3 = 18$.
- 5p** b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p** c) Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.